

KANÁLOVÁ KOMUNIKACE POMOCÍ DETERMINISTICKÉHO CHAOSU

Ladislav Běhal

Inženýrská informatika, 2. ročník, prezenční forma
Školitel: prof. Ing. Karel Vlček, CSc.

Fakulta aplikované informatiky
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Nad Stráněmi 4511
760 05 Zlín
Česká republika
behal@fai.utb.cz

Abstrakt. Tato práce se zabývá rozbořem současných technik digitální komunikace využívajících deterministický chaos. Značná část je věnována problematice chaotické synchronizace. Je zde také presentována technika nalezení neznámého parametru u vzájemně propojených chaotických systémů pomocí evolučního algoritmu Diferenciální evoluce.

Klíčová slova. Deterministický chaos, chaotická modulace, synchronizace chaosu, diferenciální evoluce

1 Úvod

Využití nelineárních technik v kódovacích schématech se v poslední době stalo poměrně zkoumanou oblastí po celém světě. Jako nelinearitu jsou zde převážně míněny tzv. „systémy deterministického chaosu [3]“. Jedním z významných přínosů těchto postupů je v literatuře uváděno snižování tzv. „fading efektu“, který vzniká převážně při bezdrátové komunikaci. Také se nelineárními technikami zvyšuje bezpečnost z hlediska utajení informace. Buď čistou enkrypcí zpráv či zvýšenou odolností proti potencionálnímu rušení (jamming). Bezpečnostní odolnost je zajištěna charakteristickou neperiodicitou chaotických sekvencí.

Chaotické generátory, či chaotické mapy jsou systémy popsány diferenciálními rovnicemi, nebo iteračními mapami. Ty jsou typické tím, že generují výstup vykazující chaotické chování. Jedním z nejznámějších chaotických jevů je tzv. „motýlí efekt“ (butterfly effect), jinak řečeno, vysoká citlivost na počáteční podmínky. Tento efekt je zapříčiněn alespoň jedním kladným Ljapunovským exponentem generujícího systému. Pokud tedy porovnáme dva totožné systémy s velmi blízkými počátečními podmínkami, vzájemný rozdíl bude narůstat s exponenciálním přírůstkem.

Potenciální přínosy použití nelineárních prostředků pro dig. komunikaci mohou být shrnuty dle [5] do těchto bodů:

- zvýšená přenosová rychlost
- nižší nároky na spotřebu el. energie
- nižší pravděpodobnost kolizí
- nižší pravděpodobnost detekce

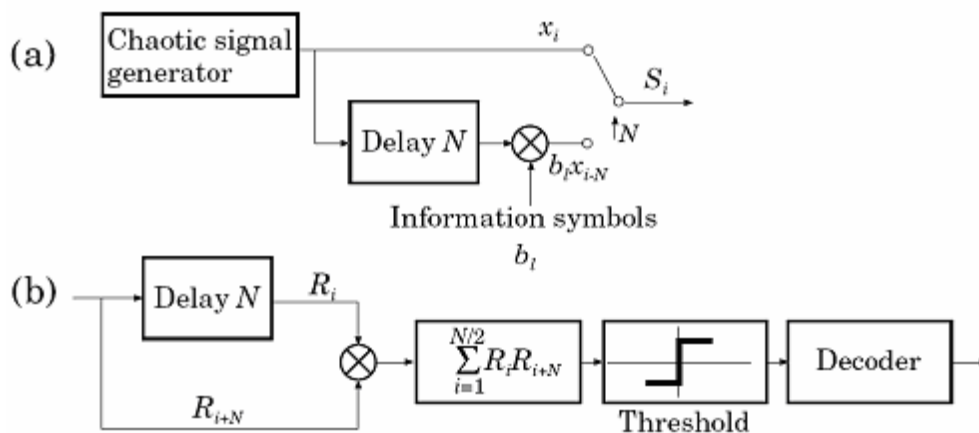
Ať už se chaotický signál používá jako nosná vlna, či je využit v nějakém kódovém schématu (míněno ECC kódy), tak klíčovou roli hraje tzv. „synchronizace chaotických signálů“. Chaotická synchronizace byla objevena v devadesátých letech minulého století [1,2]. Od té doby se velká část výzkumníků soustředila na vytváření synchronizačních spojení a jejich následné zlepšování s ohledem na robustnost a úplnost sesynchronizovaného stavu (bližší informace v oddílu 3 Chaotická synchronizace). V komunikačních schématech je tedy klíčové, aby synchronizace byla na takové úrovni, která zajišťuje nízké BER (Bit Error Rate) při co nejvyšších úrovních šumu v kanálu.

2 Chaotické modulace

V této sekci budou probrány techniky chaotické modulace.

2.1 Differential Chaos Shift Keying (DCSK)

Jedna z nejjednodušších modulačních technik navržená G. Kolumbanem a kol. v roce 1996 využívá chaotický systém jako nosnou vlnu pro přenos digitální informace. Ta je zakomponována do chaotické sekvence o určité délce, tak aby na straně přijímače mohlo dojít ke korelaci, při které se určí, zda je přenášený bit v 0 či 1. Průběh modulace znázorňuje následující schéma *Obrázek 1* přejeté z [4].



Obrázek 1: DCSK schéma. (a) transmitter. (b) receiver.

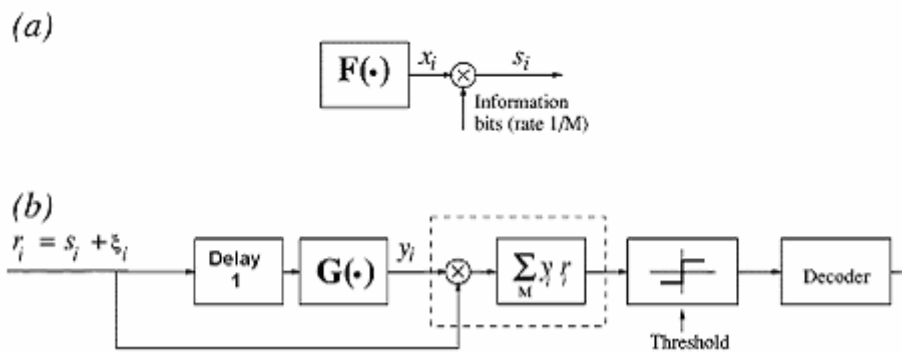
Přenášený signál lze tedy vyjádřit pomocí *Equation 1*, kde b_i je bitová hodnota reprezentovaná jako $b_i = \pm 1$:

$$S_i = \begin{cases} x_i & 0 < i \leq N \\ b_i x_{i-N} & N < i \leq 2N \end{cases} \quad (1)$$

Nevýhodou tohoto přístupu je nutnost opakovat signál s informacemi a signál bez informací. Tím dochází k redukci jednoho z významných faktorů pro použití chaotických systémů a to bezpečnosti. Další případnou nevýhodou je fakt, že opakováním signálu dochází k plýtvání nutné energie k vyslání jednoho bitu informace.

Nutnost znovu vysílat (opakovat) chaotickou sekvencí byla odstraněna v návrhu modulace od M. Suchchik (2000) zvané *Correlation Delay Shift Keying* (CDSK). Tato metoda je téměř stejná jako DCSK jen namísto přepínače (Obrázek 1 a) je použita sčítačka a je mírně změněn proces zpožděného násobení. Tedy je přenášen součet chaotické sekvence s chaotickou sekvencí násobenou informačním bitem. Tento přístup však pochopitelně vede k degradaci přesnosti rekonstrukce v závislosti na kanálovém šumu. Bližší informace k tomuto schématu lze nalézt v [6]. Zde je nutné upozornit na fakt, že tyto schémata nevyužívá ke svému průběhu chaotickou synchronizaci

Jedna z dalších modulačních metod je *Symmetric chaos shift keying* (SCSK), která již narozdíl od předešle zmíněných využívá ke svému chodu synchronizaci chaosu. V podstatě se využívá dvou chaotických systémů, u kterých je nutný předpoklad, aby transformace mapy byla sudou funkcí (tedy mapa: $F(x) = F(-x)$). Informace jsou totiž předávány v podobě $bl = \pm 1$. Tedy polarita je získána až při násobení přenesené informace s_i , která je násobkem výsledku $F(\cdot)$ a informačního bitu v podobě ± 1 , od odezvy z response (řízeného) chaotického systému y_i . Pro vysvětlení: Zpoždovací člen „Delay 1“ je před $G(\cdot)$ z toho důvodu, aby response systém dal stejnou hodnotu jako je hodnota x_i ($s_i = bl \otimes x_i$).



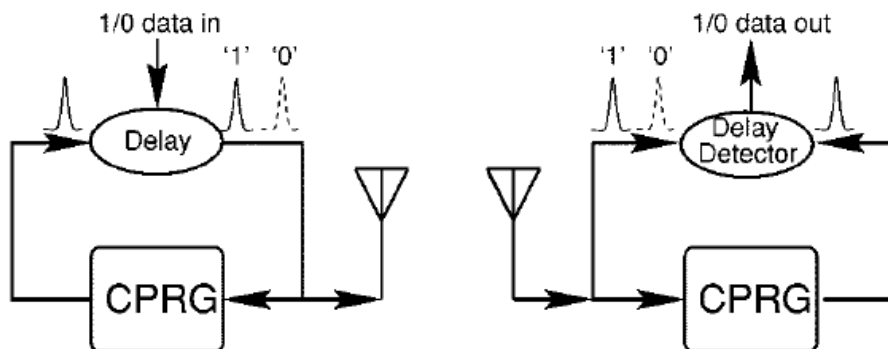
Obrázek 2: SCSK schéma a) Transmitter, b) Receiver [upraveno z 6]

SCSK schéma má dle [6] nejvyšší schopnosti uchování informace v závislosti na síle signálu (šumu). Nicméně je nutné poznamenat, že v tomto řešení je potřebné omezit chaotické systémy, tak aby mapování bylo sudou funkcí. Také systém jakožto celek (tedy spojení F a G) musí být stabilní (viz. sekce stabilita chaotické synchronizace). Tento přístup, tedy využití chaotické synchronizace, se zdá být nejvíce příslibným.

Sensitivita synchronizace chaosu na náhodné jevy v kanálu je limitujícím faktorem. Toto omezení se podařilo výrazně snížit pomocí „impulsive-based“ přenosovým systémem, který data moduluje do impulsů o intervalech určených chaotickým systémem. Tedy v podstatě se systémy synchronizují na diskrétní hodnoty. Více o této metodě v následující kapitole.

2.2 Chaotic pulse position modulation

Jednou z metod používajících výše zmíněný systém je *Chaotic Pulse Position Modulation* CPPM [7]. Komunikace je postavena na zpožďovacím členu, který je znázorněn na následujícím obrázku *Obrázek 3*. Binární hodnoty jsou representovány úpravou nosného signálu znásobením nosné pulsem v případě 1 a nulovou úpravou v případě 0. Tedy detekce takového přenosu je velmi obtížná neboť nulové hodnoty jsou nedetekovatelné a intervaly mezi přenášenou informační hodnotou mají chaotický průběh.



Obrázek 3: Delay generators – transmitter/receiver (vlevo/vpravo)

Zřejmým nedostatkem tohoto přístupu je fakt, že oba chaotické musí být dokonale synchronizovány, jinak by docházelo k enormním chybám přenosu.

Všechny předešlé metody komunikace mají jednu podstatnou nevýhodu oproti klasickým metodikám přenosu. Chaotické systémy vyžadují redundantní přenos informace určené k synchronizaci. Tedy jejich bitová „náročnost“ je vyšší s ohledem na neredundantní data. Na druhou stranu však tyto systémy přináší zvýhodnění v oblastech bezpečnosti a jsou tedy mnohem vhodnější u aplikací v oblasti bezdrátových přenosů.

Aplikace chaotických systému se také uplatňuje v oblasti optické komunikace, kde se navrhované komunikační schémata pohybují rychlostně v oblastech působnosti standardů OC-48 (2.5 Gbps) či případně OC-198 (10 Gbps).

Bylo by také vhodné poznamenat, že při tvorbě efektivního komunikačního schématu je nutné dodržet symetrii mezi vysílačem a přijímačem (chaotickými systémy). Tedy přidání informací do chaotické sekvence nesmí narušit synchronizační stav. Jedním z špatných příkladů tohoto přístupu je *Chaos Shift Keying* (CSK) [8].

3 Synchronizace chaosu

Synchronizace nelineárních systémů je v dnešní době vysoce zajímavým a zkoumaným jevem. Tento úkaz vzájemné korelace dvou či více systémů se hojně vyskytuje v přírodě. Jednou z nejzajímavějších oblastí působnosti tohoto vědeckého okruhu je lidské tělo. Poměrně známým úkazem je synchronizace kardio-respiračního systému. Nejvýznamnějším a pravděpodobně i nejméně probádaným článkem lidského těla, kde dochází k přirozeně se vyskytující synchronizaci je lidský mozek. Můžeme zde uvést příklady zvýšené synchronizační aktivity u muzikální části populace oproti nemuzikální během naslouchání hudebních nahrávek, či nově zkoumané možnosti detekce narušené synchronizace před epileptickým záchvatem. Mimo biologickou sféru lze uvést výskyt synchronizace u vzájemně propojených klimatických systémů.

V devadesátých letech minulého století byl objeven jev **synchronizace dvou chaotických systémů** za pomoci vzájemného propojení. Od té doby se tento fenomén stal oblíbeným tématem pro studii mnoha výzkumných pracovníků po celém světě. Výborné pojednání na téma synchronizace chaotických systémů je možno nalézt v [14] či později v [13].

V současnosti bylo objeveno či zkonstruováno mnoho typů synchronizace. Ty se dělí podle vztahu obou systémů v sesynchronizovaném stavu. Je totiž možné s úspěchem korelovat amplitudu, fázi dokonce s časovým posunutím (ať už v před či vzad).

Synchronizace chaotických systémů může být rozdělena do několika hlavních proudů [13, 14]:

- Complete (identical) (CS)
- Generalized, Linear Generalized (GS, LGS)
- Phase, Imperfect Phase (PS, IPS)
- Lag, Intermittent Lag (LS, ILS)
- Anticipating (AnS)

Complete (identical) synchronizace byla první objevenou a je nejjednodušší formou synchronizace. Nikoli však nejčastěji se vyskytující. Identická synchronizace se vyznačuje úplnou shodou stavových proměnných všech propojených chaotických systémů bez časového posunutí. Pokud tedy dva systémy: $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ a $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$, kde x_i a y_i jsou příslušné stavové proměnné. Complete synchronizace nastane když, $X \equiv Y$ nebo synchronizační chyba definována jako: $|X(t) - Y(t)| \rightarrow 0$ asymptoticky. Problematice určení kvality synchronizace se věnuje Bindu M. Krishna a kolektiv v článku „Quantifying chaotic synchronization using error evolution“ [15].

Generalized, Linear Generalized synchronizace nastávají za předpokladu, že $X \equiv \psi(Y)$. Kde ψ je transformační funkce, která převádí stavové proměnné systému Y na systém X . V případě že ψ je lineární transformací hovoříme o „Linear Generalized synchronization“. Detekce generalized synchronizace může být postavena na faktu, že dva blízké body v řídicím systému musí při sesynchronizovaném stavu evokovat dva sousední body v řízeném systému. Generalized synchronizace je obvyklá u spojení dvou strukturálně netotožných systémů (viz. [1] rovnice 37).

Phase, Imperfect Phase jsou synchronizace ovlivňující pouze fázi obou systémů. Amplitudy jsou v těchto případech naprosto nekorelované. Fázová synchronizace je jednou z nejčastěji se vyskytujících synchronizací v přírodních podmínkách. Její detekce je však u nelineárních systémů značně náročná a to kvůli problematice určení fáze u neperiodických (chaotických) systémů. Pokud však atraktory obou systémů vypadají jako „smeared limit cycle“. Poté lze určit fázi jako:

$$\phi(t) = \arctan(y(t)/x(t)) \quad (2)$$

Na některých atraktorech je periodicitu možné určit za pomoci *Poincare' section*. Fáze se poté určí dle následující rovnice (3), kde τ_k je čas k-tého průniku s Poincare' sekcí.

$$\phi(t) = 2\pi k + 2\pi \frac{t - \tau_k}{\tau_{k+1} - \tau_k} \quad (\tau_k < t < \tau_{k+1}) \quad (3)$$

Určení fáze pomocí (2) je podmnožinou určovací metodiky (3). Metodiku (3) však komplikuje nutnost správného umístění *Poincare' section*.

Další typy synchronizace jsou definovány jako posunutí v časové oblasti. Již poměrně delší dobu známý jev **Lag** synchronizace je definován jako posunutí řízeného systému o τ . Synchronizační stav je definován v rovnici (4), kde řídicí systém je označen indexem 1 a řízený indexem 2.

$$x_2(t + \tau_0) \approx x_1(t), \quad y_2(t + \tau_0) \approx y_1(t), \quad z_2(t + \tau_0) \approx z_1(t) \quad (4)$$

Detekci tohoto synchronizačního režimu je možno provést pomocí tzv. „similarity function [2]“ (5):

$$S^2(\tau) = \frac{\langle (x_2(t + \tau) - x_1(t))^2 \rangle}{\sqrt{\langle x_1^2(t) \rangle \langle x_2^2(t) \rangle}} \quad \min_{\tau} S(\tau) = S(\tau = \tau_0) \quad (5)$$

Předešlá rovnice (5) tedy říká, že se snažíme najít takové τ , pro které funkce S^2 minimální. U identické synchronizace by τ bylo rovno nule.

Podobným synchronizačním typem je **anticipated** synchronizace, která však vzniká na základě jiných procesů a je narození od lag synchronization v obráceném časovém pořadí. Tedy přijímač předpovídá průběh vysílače. Tento synchronizační jev popsany v [16] má mnohem zajímavější využití než předešlé synchr. typy. Chaotické systémy generující takovéto chování jsou popsány pomocí DDE (Delayed Differential Equations).

Ve vzájemně propojených systémech je možné pozorovat přechody mezi jednotlivými synchronizačními stavy v závislosti na síle propojení systémů (více v [13]).

3.1 Stabilita synchronizačních schémat

Určení stability synchronizačního schématu hraje klíčovou roli v designu schémat pro digitální komunikaci. Je nutné totiž zajistit odolnost systému proti šumu nacházejícím se na přenosové trase. Jednou z nejpoužívanějších metod pro klasifikaci vzájemně propojených systémů jako stabilní je určení tzv. „*transverse Lyapunov exponents*“. Tato metoda vychází z faktu, že pokud jsou spojené systémy brány jako celek, tak je nutný předpoklad, aby chyba určená dle: $e = X - Y$ byla „definována“ fixním bodem v nule. Tento fixní bod existuje pokud jsou všechny Lyapunovy exponenty e negativní. Pro bližší pochopení: „*Transverse*“ jsou tyto exponenty zvané proto, že systém vznikly spojením X a Y je po transformaci souřadnic $X - Y$ kolmý k synchronizačnímu manifoldu. Synchronizačním manifoldem se zde myslí hyperplocha vzniklá v rovnovážném stavu při $e = 0$.

Uvažujme dva vzájemně propojené Rösslerovy chaotické systémy metodou negativní zpětné vazby (nebo také diffusive coupling [1]):

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -(y_1 + z_1), & \frac{dx_2}{dt} &= -(y_2 + z_2) + \alpha(x_1 - x_2), \\
\frac{dy_1}{dt} &= x_1 + ay_1, & \frac{dy_2}{dt} &= x_2 + ay_2, \\
\frac{dz_1}{dt} &= b + z_1(x_1 - c), & \frac{dz_2}{dt} &= b + z_2(x_2 - c)
\end{aligned}
\tag{6}$$

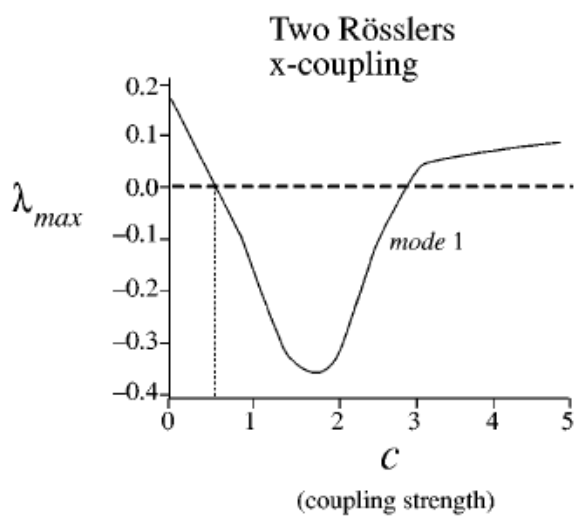
Zavedením transverse systému: $x_{\perp}=x_1-x_2$, $y_{\perp}=y_1-y_2$, $z_{\perp}=z_1-z_2$, dostaneme nové propojení:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_{\perp}}{dt} &= -\alpha x_{\perp} - y_{\perp} - z_{\perp}, \\
\frac{dy_{\perp}}{dt} &= x_{\perp} + ay_{\perp}, \\
\frac{dz_{\perp}}{dt} &= z_1(x_1 - c) - z_2(x_2 - c),
\end{aligned}
\tag{7}$$

Tento systém následně lokálně zlinearizujeme:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_{\perp}}{dt} \\ \frac{dy_{\perp}}{dt} \\ \frac{dz_{\perp}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ z & 0 & x-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\perp} \\ y_{\perp} \\ z_{\perp} \end{pmatrix}
\tag{8}$$

Vypočtením Lyapunovových exponentů pro různé hodnoty α můžeme určit pro jaké hodnoty bude synchronizační schéma stabilní. V podstatě stačí uvést do závislosti pouze jeden Lyapunův exponent a to maximální: λ_{max} . Negativní hodnota maximálního exponentu zajišťuje stabilitu daného schématu. Závislost λ_{max} na α (v grafu C) je zobrazena na následujícím grafu (přejat z [1]):



Obrázek 4: Maximální transverse Lyapunov exponent jako funkce coupling strength

Pro určení stability u systémů využívajících complete replacement lze také využít tzv. „*conditional Lyapunov exponents*“, kdy se počítá maximální Lyapunův exponent pro subsystém, který je závislý na proměnné z řídicího systému [1].

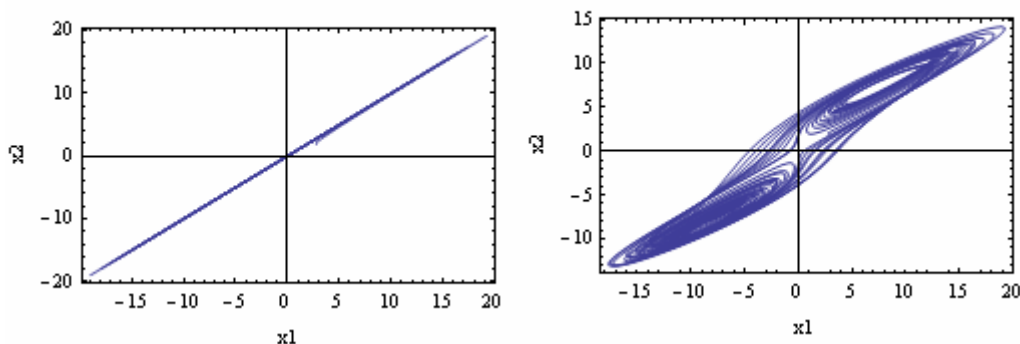
Závěrem této sekce je však nutné poznamenat, že negativita Lyapunových exponentů poskytuje pouze nutnou podmínku k globální stabilitě. I v případě negativního maximálního exponentu mohou nastat lokální oblasti, ve kterých schéma nebude poskytovat dokonalý synchronizační pohyb. Problematika stability je netriviální a v posledních letech se jí věnuje značná část vědecké komunity. Širší rozbor stability chaotického pohybu může být nalezen v [2].

4 Hledání neznámého parametru pomocí evolučních algoritmů

V této sekci bude presentován postup nalezení neznámého parametru u vzájemně propojených chaotických systémů. Tyto systémy je možné popsat následujícími rovnicemi (9), kde $s(t)$ je zvolena jako y_1 :

$$\begin{aligned}\dot{x}_{12} &= -\rho x_{12} + \rho s(t), \\ \dot{y}_{12} &= 28x_{12} - y_{12} - x_{12}z_{12}, \\ \dot{z}_{12} &= x_{12}y_{12} - 2.666z_{12}\end{aligned}\tag{9}$$

Vzájemné propojení je tedy jednosměrné, typu APD (active-passive decomposition [19,2]). Pro experimentální účely byl u řídicího systému parametr ρ nastaven na hodnotu 10. Cílem použitého algoritmu bylo tedy nalézt tuto hodnotu pouze z přenášené informace (y_1). S rozdílnými hodnotami parametru ρ dosažení synchronizačního stavu je nemožné (viz. Obrázek 5).



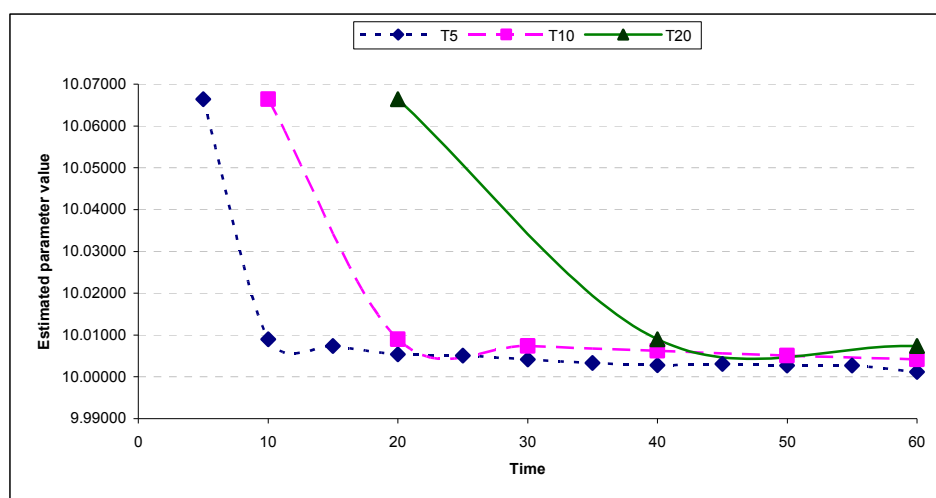
Obrázek 5: Vývoj synchronizace pro $\rho=10$ (vlevo) a $\rho=5$ (vpravo)

Postup nalezení neznámého parametru lze popsat následovně:

- 1) Pro časový interval M volný průběh systémů po který se zaznamenávají viditelné stavové proměnné
- 2) Užití evolučního algoritmu Diferenciální evoluce (DE) [17] s účelovou funkcí ve tvaru: (10)
- 3) Nastavení zjištěného parametru ρ do řízeného systému (v rovnicích (9) označen indexem 2)
- 4) Zpět k bodu 1)

$$CFV = \frac{\sum_{i=1}^M |y_{1i} - y_{2i}|^2}{M}\tag{10}$$

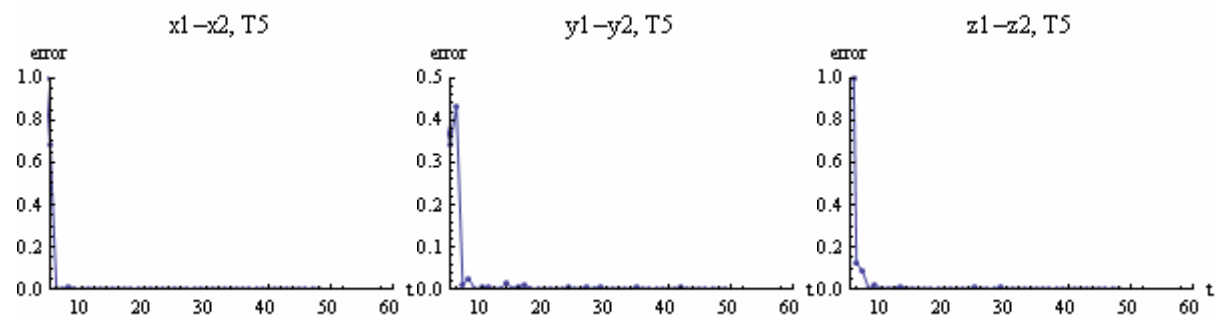
Výsledky nalezení parametru pro různé hodnoty M jsou zobrazeny v následujícím grafu ($M=5=T5$, $M=10=T10$, $M=20=T20$):



Obrázek 6: Rychlost konvergence DE pro různé hodnoty M

Z předešlého grafu (Obrázek 6) je patrné, že nalezení neznámého parametru u vzájemně propojených systémů metodou APD není prakticky závislé na délce „pozorovacího intervalu“. Minimální hodnotu M však lze očekávat. Aplikace tohoto postupu může být v dekrypci chaotických šifer využívajících parametry chaotických systémů jako tzv. „klíče“.

Průběh synchronizační chyby definované jako rozdíl jednotlivých stavových proměnných je zobrazen na následujících grafech:



Obrázek 7: Vývoj synchronizační chyby pro $M=5$

5 Závěr

V práci byly uvedeny techniky chaotické komunikace, které svou podstatou zvyšují bezpečnost digitální komunikace a mohou přinést mnoho zajímavých aspektů, které jsou úzce spjaty s vysokou nelinearitou chaotických generátorů. Dále byl presentován autorem navržený postup pro rekonstrukci neznámého parametru u vzájemně propojených chaotických systémů, které jsou meritem současných chaotických komunikačních technik. Jako budoucí pracovní body je možno považovat rozšíření techniky nalezení parametru i na více-parametrické hledání a jiné typy propojení. Dále potom mohou být prověřeny aplikační možnosti tohoto postupu v oblasti kryptografie či kanálového kódování.

Reference

- [1] L. M. Pecora, T. L. Carroll, G. A. Johnson, D. J. Mar and J. F. Heagy. "Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications," *Chaos*, vol. 7, no. 4, pp. 520–543, 1997.
- [2] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osopiv, D.L. Valladares, C. S. Zhou. „The synchronization of chaotic systems“, *Physics Reports* 366, Elsevier Science B. V., 2002.
- [3] J. C. Sprott, "Chaos and Time-Series Analysis", Oxford University Press, 2003, ISBN 978-0-19-850840-3.
- [4] G. Kolumban, B. Vizvari, W. Schwarz, A. Abel, Differential chaos shift keying: a robust coding for chaos communication, in *Proceedings of the NDES, Seville*, pp. 87-92, 1996.
- [5] L. E. Larson, J-M Liu, L. S. Tsimring, "Digital communications using chaos and nonlinear dynamics", Springer, 2006.
- [6] M. Sushchik, L. S. Tsimring, A. R. Volkovskii, Performance analysis of correlation-based communications systems using chaos, *IEEE Trans. Circuits Sys. – I*, vol. 47, no. 12, pp. 1684-1691, 2000.
- [7] M. Sushchik, N. Rulkov, L. Larson, L. Tsimring, H. Abarbanel, K. Yao, A. Volkovskii, "Chaotic pulse position modulation: a robust method of communicating with chaos", *IEEE Comm. Lett.*, vol. 4, 2000.
- [8] U. Parlitz, L. O. Chua, L. Kocarev, K. S. Halle, A. Shang, "Transmission of digital signals by chaotic synchronization", *Int. J. Bifur. Chaos*, vol. 2, pp. 973-977, 1992.
- [9] T. L. Carroll, L. M. Pecora, "Cascading synchronized chaotic systems", *Physica D*, Volume 67 , Issue 1-3, ISSN:0167-2789, Elsevier Science Publishers B. V., 1993
- [10] Carroll, T.L., Pecora, L.M., „Synchronizing nonautonomous chaotic circuits“, *Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, Volume 40, Issue 10, 1993
- [11] Amritkar, R. E.; Gupte, Neelima, "Synchronization of chaotic orbits: The effect of a finite time step", *Physical Review E*, Volume 47, Issue 6, pp.3889-3895, June 1993.
- [12] Carroll, T.L., "Synchronizing chaotic systems using filtered signals", *Phys. Rev. E* 50, 2580 - 2587 (1994)
- [13] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osopiv, D.L. Valladares, C. S. Zhou. „The synchronization of chaotic systems“, *Physics Reports* 366, Elsevier Science B. V., 2002.
- [14] L. M. Pecora, T. L. Carroll, G. A. Johnson, D. J. Mar and J. F. Heagy. "Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications," *Chaos*, vol. 7, no. 4, pp. 520–543, 1997.
- [15] Krishna B. M., Indic P., Nair U., Pratap R., „Quatifying chaotic synchronization using error evolution“, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 14, p. 3682-3692, 2009.
- [16] Voss HU. Real-time anticipation of chaotic states of an electronic circuit. *Int J Bifurc Chaos*;12:1619–25, 2002.
- [17] Storn, R., Price, K.: "Differential evolution - a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces." Technical Report TR-95-012, ICSI, 1995.
- [18] Běhal, L., Giesl, J.: "Parameter estimation in chaotic synchronization by Differential evolution algorithm", In: *Proc. 15th International Conference on Soft Computing* , Brno, 127-132 , ISBN 978-80-214-3884-2, 2009.
- [19] L. Kocarev, U. Parlitz, "General Approach for Chaotic Synchronization with Applications to communication", *Phys. Rev. Lett.* 74, 5028, 1995.